

Compressed sensing pour l'imagerie radar

Clémentine Courtès, Geneviève Dusson, Roméo Hatchi, Roberto Molina, Albert Thomas

▶ **To cite this version:**

Clémentine Courtès, Geneviève Dusson, Roméo Hatchi, Roberto Molina, Albert Thomas. Compressed sensing pour l'imagerie radar : Semaine d'Etude Maths Entreprises, Paris, 12-16 janvier 2015. [Rapport de recherche] AMIES. 2015. hal-01132288

HAL Id: hal-01132288
https://hal.science/hal-01132288

Submitted on 16 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Rapport de la SEME
(Semaine d'Étude Maths Entreprise)

Compressed sensing pour l'imagerie radar

12/01/2015-16/01/2015

Clémentine Courtès, Geneviève Dusson, Roméo Hatchi, Roberto Molina, Albert Thomas
Sujet proposé par Eric Duceau

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Présentation du problème **2**
2.1 Modèle des points brillants 2
2.2 Réécriture du problème 3

3 Reconstruction du signal grâce aux séries de Fourier **3**
3.1 Discrétisation en Fourier 3
3.2 Coût et efficacité de l'approximation en Fourier 4

4 Compressed sensing **5**
4.1 Le principe du compressed sensing 5
4.2 Application à notre problème 7
4.2.1 Propriété d'isométrie restreinte et théorèmes 7
4.2.2 Preuves 8
4.3 Conditions pratiques d'utilisation du compressed sensing 9
4.4 Différentes stratégies d'échantillonnage 9

5 Illustrations numériques **10**
5.1 Influence de la taille M de l'échantillon sur l'image reconstruite 10
5.1.1 Résultats visuels 10
5.1.2 Introduction d'un critère de performance 11
5.2 Illustration sur données bruitées 12

6 Conclusion et perspectives **12**

Merci à Eric Duceau et aux organisateurs de la SEME pour leur investissement et leurs conseils avisés.

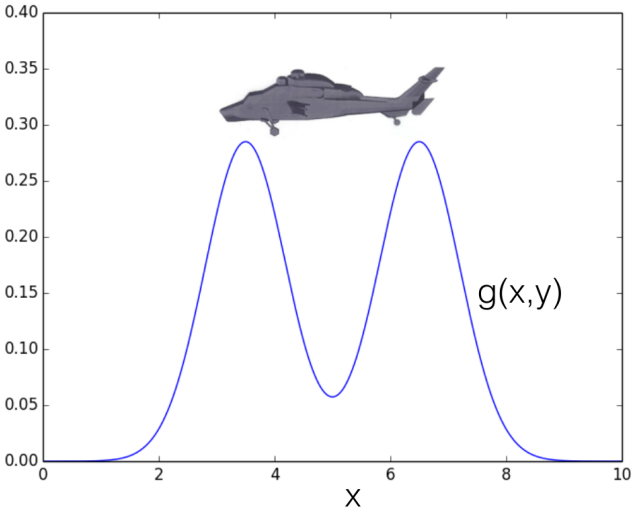


FIGURE 1 – Fonction d'intérêt

1 Introduction

Ce rapport est le fruit d'un travail effectué lors de la SEME (Semaine d'Étude Maths Entreprise). Le projet présenté ici a été proposé par Airbus et provient du domaine de l'imagerie radar [2], [10]. Les coûts de calcul de reconstruction d'un signal grâce à ses modes de Fourier sont importants et soumis au théorème de Nyquist-Shannon qui donne les conditions sur les fréquences à échantillonner pour retrouver exactement le signal d'origine [3]. Nous avons étudié une solution alternative, moins coûteuse. L'objectif est donc de reconstruire précisément une fonction d'intérêt à partir de mesures sur ses coefficients de Fourier en limitant au maximum le nombre de mesures.
Dans ce cadre, la méthode du compressed sensing [6], [7], [8] parait adaptée car elle permet de reconstruire un signal de manière efficace, dans le cas où l'on sait *a priori* qu'il est creux, i.e., qu'il contient un faible nombre de coefficients non nuls, ce qui est le cas dans le cas traité ici.

2 Présentation du problème

2.1 Modèle des points brillants

On cherche à trouver les caractéristiques d'un avion ou d'un hélicoptère survolant une zone donnée. Mathématiquement, ces caractéristiques sont représentées à travers une fonction sparse $x, y \mapsto g(x, y)$ où x, y sont des variables spatiales (figure 1). La fonction g présente des "pics", appelés points brillants, aux positions stratégiques de l'objet. L'objet est alors reconstruit à partir de l'image $g(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

En pratique on ne mesure pas directement la fonction g mais un champ électromagnétique $\overrightarrow{E(r)}$ à l'aide d'un radar (figure 2). Le champ électromagnétique dépend de la fréquence du radar f et de l'angle d'incidence θ : $\overrightarrow{E(r)} = \overrightarrow{E(f, \theta)}$. Grâce à un code de calcul, on se ramène à des données $G(f, \theta)$ qui sont les coefficients de Fourier de la fonction g, c'est le modèle des points brillants [3].

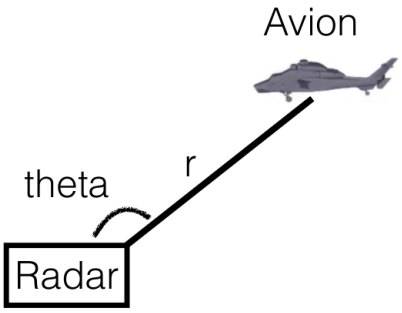


FIGURE 2 – Description du système radar

$$G(f,\theta) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x,y)e^{2\pi i(xX+yY)}dxdy \tag{1}$$

où

$$X = \frac{2f\sin(\theta)}{c}, \qquad Y = \frac{2f\cos(\theta)}{c}$$

avec c vitesse de la lumière.

Le but est alors de retrouver les K points brillants de la fonction g à partir des données $G(f,\theta)$.

2.2 Réécriture du problème

Avec la connaissance du modèle de points brillants, la fonction g est reconstruite par transformation de Fourier inverse :

$$g(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} G(f,\theta)e^{-2\pi i(xX+yY)}dXdY$$

Il nous faut alors choisir la précision souhaitée pour l'image reconstruite. Pour cela, on considère les variables suivantes :

— δx et δy pour les pas en espace,

— Δx et Δy pour les zones d'intérêt en espace.

Les pas en espace δx et δy doivent être choisis de telle sorte que l'on puisse récupérer tous les points brillants. Si le pas est trop grand, on pourrait rater certains points brillants mais plus le pas est petit, plus on aura besoin d'une large bande de fréquence (voir le théorème de Nyquist-Shannon partie 3.1). De même, plus la zone d'intérêt est grande, plus le pas en fréquence sera petit, i.e., il nous faudra un grand nombre de fréquences. Par exemple, pour récupérer les deux points brillants de la fonction g de la figure 3, il faut choisir un pas δx plus petit que la distance entre les deux points brillants. Il faut aussi choisir une zone d'intérêt Δx permettant de récupérer les deux points brillants.

3 Reconstruction du signal grâce aux séries de Fourier

3.1 Discrétisation en Fourier

Ce qui était fait jusque-là en imagerie radar consistait à retrouver les points brillants à partir de la fonction $g(x,y)$ calculée grâce à une transformée de Fourier inverse. Étant donné

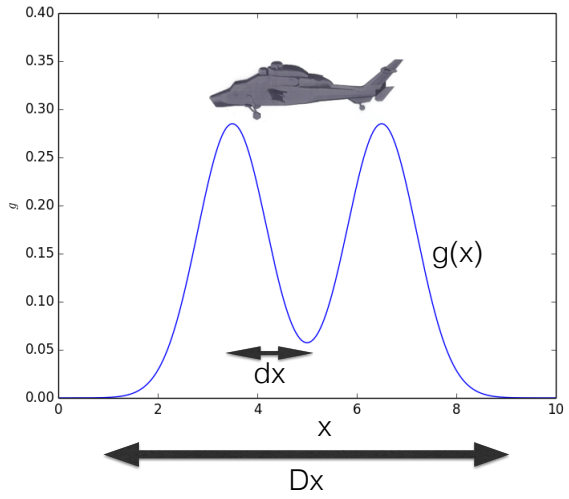


FIGURE 3 – Précision requise dans le domaine spatial

une précision souhaitée $\delta x, \delta y$ et une zone d'intérêt $\Delta x, \Delta y$, le théorème de Nyquist-Shannon donne les échantillonnages à utiliser en fréquence et en angle pour reconstruire exactement la fonction des points brillants. Dans notre cas [3], les relations entre échantillonnage spatial et échantillonnage en fréquence sont les suivantes

$$\Delta f = \frac{c}{2\delta x}, \quad \Delta\theta = \frac{c}{2f_0\delta y},$$

et

$$\delta f = \frac{c}{2\Delta x}, \quad \delta\theta = \frac{c}{2f_0\Delta y}.$$

La fonction des points brillants $g(x, y)$ est alors approchée par une transformée de Fourier inverse discrète :

$$g(x,y) = \sum_{n_1=1}^{N_1}\sum_{n_2=1}^{N_2} G(X_{n_1}, Y_{n_2}) e^{-2\pi i(xX_{n_1}+yY_{n_2})}$$

où les variables X, Y et f, θ sont régies par les relations

$$X = \frac{2f\sin(\theta)}{c}, \qquad Y = \frac{2f\cos(\theta)}{c},$$

où c est la vitesse de la lumière.

3.2 Coût et efficacité de l'approximation en Fourier

La reconstruction grâce à cette méthode fonctionne bien. En effet, si l'on reconstruit la fonction $g(x, y)$ à partir d'un grand nombre de coefficients de Fourier, on retrouve exactement la fonction d'origine. Dans la figure 4, l'image de départ est composée de deux points brillants d'une intensité 2 (en blanc) et de deux points brillants d'une intensité 1 (en gris). À partir du modèle des points brillants (1), on calcule les coefficient de Fourier $G(f, \theta)$ de g, qui seront les données simulées avec lesquelles nous essaierons de reconstruire l'image de départ. Avec un

Image de départ

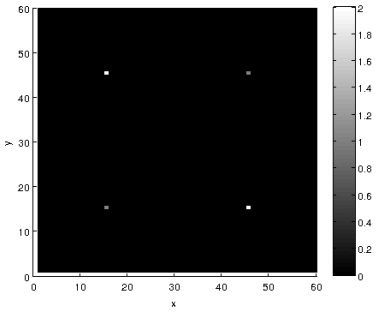


Image retrouvée par Fourier

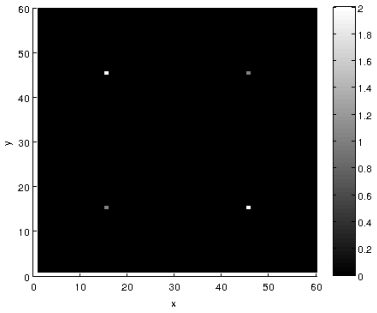


FIGURE 4 – Reconstruction de la fonction g grâce aux séries de Fourier

grand nombre de coefficients de Fourier, on retrouve bien l'image de départ, i.e, la fonction g de l'image de départ. Il serait cependant également intéressant d'étudier à partir de combien de points d'échantillonnage le signal est reconstruit et comment il est déformé si le nombre de points d'échantillonnage est trop faible.

Le coût de l'algorithme est cependant assez élevé. En effet, l'algorithme utilisé pour faire la transformée de Fourier inverse est la FFT (Fast Fourier Transform). Il est en $O(N \log N)$ où N est la taille de l'image (au lieu de $O(N^2)$ pour un algorithme classique) et assez rapide par rapport à la taille de l'image mais le théorème de Nyquist-Shannon garantit la reconstruction seulement si les conditions sur l'échantillonnage sont vérifiées, ce qui implique d'utiliser un nombre de points importants. Malheureusement, dans le cas traité ici, le calcul des valeurs d'échantillonnage $G(f, \theta)$ est coûteux et cette méthode prend donc du temps. De plus, les seuls points intéressants de la fonction d'intérêt $g(x, y)$ sont les points non nuls. On calcule donc N valeurs de la fonction $g(x, y)$ alors que seules $K << N$ d'entre eux nous intéressent. On voudrait donc se tourner vers des stratégies alternatives, qui prennent en compte le fait que le nombre de points brillants est très réduit. Le Compressed Sensing est la méthode que nous avons étudiée dans ce projet.

4 Compressed sensing

Afin de s'affranchir des contraintes imposées par l'utilisation du théorème de Nyquist-Shannon (échantillonnage régulier, fréquence d'échantillonnage imposée, ...), nous utilisons la méthode du compressed sensing [4].

4.1 Le principe du compressed sensing

Cette méthode repose sur le postulat suivant :

il existe une base dans laquelle le signal que nous cherchons à reconstruire est creux.

Le compressed sensing consiste ensuite à acquérir des données déjà compressées afin de minimiser le coût. Il se base sur deux étapes [6], [7], [8].

Étape 1 : Échantillonnage. Au lieu d'échantillonner de manière régulière selon un pas δf imposé par le théorème de Shannon, nous échantillonnons certains coefficients de Fourier de manière aléatoire. Plus précisément, nous sélectionnons aléatoirement M coefficients de G en calculant en parallèle la matrice d'échantillonnage Φ qui nous permet de retrouver le signal voulu g à partir des mesures G : $G = \Phi g$.

L'avantage est de ne sélectionner qu'un petit nombre de coefficients de G par rapport à la

dimension spatiale N.
Φ est donc une matrice rectangulaire de taille $M \times N$:

$$\underbrace{\left(\quad \Phi \quad \right)\Big\}}_{N} M << N$$

La matrice Φ est sous-dimensionnée (c'est-à-dire qu'elle a plus de colonnes que de lignes), le système $G = \Phi g$ a donc plus d'inconnues que d'équations, on résout donc un problème de minimisation pour ne garder qu'une seule solution.

Étape 2 : Reconstruction du signal. La reconstruction de g passe par la résolution d'un problème de minimisation ℓ^0 sous contrainte d'appartenir à l'hyperplan affine $G = \Phi g$,

$$g = \underset{\bar{g} \in \mathbb{R}^N, G = \Phi \bar{g}}{\operatorname{argmin}} \|\bar{g}\|_0,$$

où $\|g\|_0 = Card\{n, g_n \neq 0\}$.

Le problème de minimisation en norme ℓ^0 est un problème NP complet. Il sera remplacé par un problème de minimisation ℓ^1 [9] :

$$g = \underset{\bar{g} \in \mathbb{R}^N, G = \Phi \bar{g}}{\operatorname{argmin}} \|\bar{g}\|_1,$$

Remarque La norme ℓ^1 a l'avantage d'être convexe et d'imposer à la solution g d'être creuse [8]. En effet, nous pouvons l'expliquer de manière heuristique en dimension 2 ($N = 2$) grâce à la figure 5. Un signal sparse est un signal n'ayant qu'un nombre fini ($K << N$) de valeurs non nulles, il est donc situé sur les axes des abscisses et/ou des ordonnées sur la figure. Si nous utilisons une minimisation ℓ^2 (minimisation de la norme euclidienne), sous contrainte d'appartenir à l'hyperplan affine (la droite $G = \Phi g$), le minimiseur n'est pas nécessairement sparse. Par contre, les boules des normes ℓ^1 étant des losanges, le minimum sera atteint à un sommet, soit un point situé sur un des axes : axe des abscisses ou axe des ordonnées. Le minimiseur sera donc bien creux.

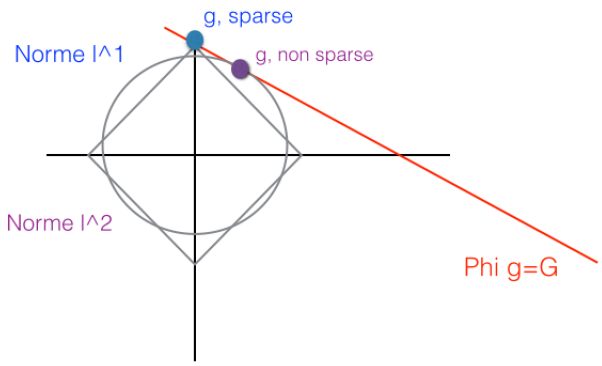


FIGURE 5 – Minimisation sous contrainte pour les normes ℓ^0 et ℓ^1

4.2 Application à notre problème

Nous pouvons appliquer la méthode du compressed sensing puisque dans le modèle des points brillants, nous savons *a priori* que le signal g est compressible dans la base de Fourier.
Il suffira donc de travailler avec les coefficients de Fourier et d'en sélectionner M de manière aléatoire.

$$\begin{pmatrix} G(X_1) \\ \vdots \\ G(X_M) \end{pmatrix} = \underbrace{\left(e^{2i\pi x X}\right)_{\substack{x=x_1,\dots,x_N \\ X=X_1,\dots,X_M}}}_{\Phi} \begin{pmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{pmatrix}$$

Question : Il reste à savoir sous quelles conditions sur la matrice d'échantillonnage Φ on retrouve la fonction d'intérêt $g(x, y)$.

4.2.1 Propriété d'isométrie restreinte et théorèmes

Notre but est donc de retrouver $g \in \mathbb{R}^N$ (presque) creux, qui vérifie $G = \Phi g$ avec $G \in \mathbb{R}^M, \Phi \in \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$ (M< N).

Cela revient à chercher l'élément minimisant le problème suivant

$$\min_{\bar{g}\in\mathbb{R}^N; G=\Phi\bar{g}} \|\bar{g}\|_1. \tag{2}$$

Nous allons voir que si Φ satisfait une condition, qui est la propriété d'isométrie restreinte (RIP en anglais), alors la solution de (2) est g lui-même. Nous rappelons d'abord le concept des constantes d'isométrie restreinte [5].

Définition 1. *Soit $K \in \mathbb{N}^*$, la constante d'isométrie restreinte δ_K est le plus petit réel positif tel que*

$$(1-\delta_K)\|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1+\delta_K)\|x\|_2^2, \ \forall x \in \mathbb{R}^N, K - \text{creux}.$$

Un vecteur est dit K-creux s'il a au plus K coordonnées non nulles. On peut remarquer que pour x, x' K-creux, nous avons

$$(1-\delta_{2K})\|x-x'\|_2^2 \leq \|\Phi(x-x')\|_2^2 \leq (1+\delta_{2K})\|x-x'\|_2^2. \tag{3}$$

Le théorème suivant concerne non seulement les vecteurs creux mais aussi tous les vecteurs $g \in \mathbb{R}^N$. Il permet de mesurer la qualité de la reconstruction ; en effet, nous comparons la reconstruction g^* avec la meilleure approximation creuse de g, obtenue en prenant les K plus grandes valeurs de g. Nous notons g_K cette approximation, c'est-à-dire, le vecteur g avec toutes ses coordonnées nulles sauf les K plus grandes valeurs.

Théorème 1 (Récupération sans bruit). *Supposons que $\delta_{2K} < \sqrt{2}-1$. Alors g^* solution de (2) vérifie*

$$\begin{cases} \|g^* - g\|_1 \leq C_0 \|g - g_K\|_1 \\ \|g^* - g\|_2 \leq \dfrac{C_0}{\sqrt{K}} \|g - g_K\|_1 \end{cases}$$

où

$$C_0 = 2\frac{1+\rho}{1-\rho} \text{ avec } \rho = \sqrt{2}\frac{\delta_{2K}}{1-\delta_{2K}}.$$

En particulier, si g est K-creux, la récupération est exacte : $g^* = g$.

Dans le cas où g est creux, il est naturel de chercher la solution la plus creuse de $G = \Phi\bar{g}$ et de s'intéresser au problème suivant

$$\min_{\bar{g}\in\mathbb{R}^N; G=\Phi\bar{g}} \|\bar{g}\|_0.$$

Le théorème 1 nous dit que les deux problèmes sont formellement équivalents au sens où :
- si $\delta_{2K} < 1$ alors le problème ℓ^0 a une unique solution K-creuse. En effet, avec (3), on a $\Phi g_1 \neq \Phi g_2$, $\forall g_1 \neq g_2$ K-creux. Les sous-matrices $M \times 2K$ de Φ sont de rang maximal et plus δ_{2K} est proche de 0, plus elles ressemblent à des isométries.
- si $\delta_{2K} < \sqrt{2}-1$, alors la solution du problème ℓ^1 est celle du problème ℓ^0 : la relaxation convexe est exacte.

Maintenant, nous allons nous intéresser à un problème plus réaliste. Nous voulons retrouver $g \in \mathbb{R}^N$ (presque) creux, qui vérifie $G = \Phi g + z$ avec $G \in \mathbb{R}^M, \Phi \in \mathcal{M}_{M\times N}(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}^N$ un terme de bruit inconnu. Compte-tenu du théorème précédent, il est naturel de chercher l'élément minimisant le problème suivant

$$\min_{\bar{g}\in\mathbb{R}^N; \|G-\Phi\bar{g}\|_2\leq\varepsilon} \|\bar{g}\|_1 \tag{4}$$

avec $\varepsilon > 0$.

Le théorème suivant valide cette intuition.

Théorème 2 (**Récupération avec bruit**). *Si $\delta_{2K} < \sqrt{2}-1$ et $\|z\|_2 \leq \varepsilon$ alors $g^* =$ solution de (4) vérifie*

$$\|g^* - g\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{K}}\|g - g_K\|_1 + C_1\varepsilon.$$

avec C_0 la même constante qu'auparavant et

$$C_1 = 2\frac{\alpha}{1-\rho} \text{ avec } \alpha = 2\frac{\sqrt{1+\delta_{2K}}}{1-\delta_{2K}}.$$

Dans la pratique, si δ_{2K} est petit alors les constantes C_0 et C_1 sont assez petites. Par exemple, si $\delta_{2K} = 0.2$ alors $C_0 = 4.2$ et $C_1 = 8.5$.

4.2.2 Preuves

Ici, nous allons seulement donner les grandes lignes des preuves. Pour les preuves complètes, nous renvoyons à [5]. Nous montrons d'abord le théorème 2, le théorème 1 s'en déduisant assez facilement. Tout d'abord, on a le lemme préliminaire, qui est une simple application de l'identité du parallélogramme :

Lemme 1. *Nous avons*

$$|(\Phi g, \Phi g')| \leq \delta_{K+K'}\|g\|_2\|g'\|_2$$

pour tous g, g' à supports dans des ensembles disjoints $T, T' \subset \{1,\dots,n\}$ avec $|T| \leq K, |T'| \leq K'$.

On commence par cette remarque basique obtenue grâce à l'inégalité triangulaire

$$\|\Phi(g^* - g)\|_2 \leq \|\Phi g^* - G\|_2 + \|G - \Phi g\|_2 \leq 2\varepsilon. \tag{5}$$

Posons $g^* = g + h$. On définit g_T le vecteur égal à g sur l'ensemble d'indices T et nul ailleurs. L'idée essentielle est de décomposer $h = h_{T_0} + h_{T_1} + h_{T_2} + \dots$, chaque sous-terme étant au mieux K-creux. Ici, T_0 désigne l'ensemble des localisations des K plus grandes valeurs de g ; T_1

l'ensemble des localisations des K plus grandes valeurs de $h_{T_0^c}$; T_2 l'ensemble des localisations des K suivantes plus grandes valeurs de $h_{T_0^c}$ et ainsi de suite. On trouve d'abord

$$\|h_{(T_0\cup T_1)^c}\|_2 \leq \|h_{T_0}\|_2 + 2e_0 \text{ avec } e_0 = \frac{1}{\sqrt{K}}\|g - g_K\|_1$$

notamment grâce à des estimations ℓ^2 sur $h_{T_j}, j \geq 2$. Ensuite, en utilisant (5), la condition RIP et le lemme 1, on obtient

$$\|h_{T_0\cup T_1}\|_2 \leq (1-\rho)^{-1}(\alpha\varepsilon + 2\rho e_0),$$

où α et ρ sont donnés dans les énoncés des théorèmes. La conclusion vient alors du fait que $\|h\|_2 \leq \|h_{T_0\cup T_1}\|_2 + \|h_{(T_0\cup T_1)^c}\|_2$. Au cours de cette preuve, on a également montré que $\|h_{T_0}\|_1 \leq \rho\|h_{T_0^c}\|_1$ et $\|h_{T_0^c}\|_1 \leq \|h_{T_0}\|_1 + 2\|g_{T_0^1}\|_1$. De ces inégalités, on déduit alors le résultat sans bruit (avec $z = 0$).

4.3 Conditions pratiques d'utilisation du compressed sensing

En réalité, il est trop coûteux de vérifier si la matrice Φ utilisée satisfait la condition RIP car cela revient à calculer les valeurs propres de toutes les matrices extraites de taille $2K \times 2K$, sachant que la matrice Φ est de taille $M \times N$.

En pratique, on utilise des matrices Φ aléatoires car il peut être prouvé théoriquement que ces matrices vérifient la condition RIP avec une probabilité proche de 1, si M est assez grand [4], [7], [1]. On choisit donc ici des coefficients de Fourier de manière aléatoire ; la matrice Φ sera donc aléatoire.

De plus, concernant le nombre d'échantillons, il est admis que lorsque le nombre de mesures M est supérieur à $4K$, la reconstruction est correcte dans environ 90% des cas et dans presque 100% des cas lorsque M est supérieur à $8K$ [6].

4.4 Différentes stratégies d'échantillonnage

Échantillonnage naturel

Pour avoir une matrice aléatoire, il est naturel d'utiliser un échantillonnage uniforme suivant f et θ dans la fenêtre d'intérêt. Cela correspond à un tirage de points du type de la partie gauche de la figure 6.

Le problème posé par ce tirage est celui du coût. En effet, dans le cas d'Airbus, le calcul d'un coefficient $G(f,\theta)$ pour une fréquence f élevée est beaucoup plus important qu'un calcul à basse fréquence. De plus, une fois qu'un coefficient pour une certaine fréquence $G(f,\theta)$ est connu, il est peu coûteux de calculer un coefficient pour la même fréquence mais avec un angle différent $G(f,\theta')$. Un tirage suivant une loi uniforme pourrait donc s'avérer malgré tout assez coûteux.

Un autre échantillonnage

Il pourrait donc être envisagé de modifier le tirage aléatoire précédent, d'une part en testant plus de basses fréquences que de hautes fréquences, et d'autre part en testant systématiquement différents angles pour une même fréquence. Cependant, il paraît difficile voire impossible de montrer théoriquement qu'un tel tirage est admissible, i.e., que la condition RIP est vérifiée.. Il faudrait donc dans un premier temps comparer numériquement les performances de ces deux tirages.



FIGURE 6 – Échantillonnage naturel (gauche) et échantillonnage souhaité (droite).

5 Illustrations numériques

Deux approches issues respectivement de [10] et [2] ont été considérées concernant le choix de la matrice Φ :

— la matrice Φ est la matrice de Fourier $\Phi = \left(e^{2i\pi k\left((x_k,y_k),(f_j,\theta_j)\right)}\right)_{1\leqslant k\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant M}$ où k est la fonction $k((x,y),(f,\theta)) = x\frac{2f\sin\theta}{c} + y\frac{2f\cos\theta}{c}$ et où les (f_j,θ_j), $1 \leqslant j \leqslant M$ sont les M couples (f,θ) échantillonnés aléatoirement,

— la matrice Φ est une matrice aléatoire telle que $\Phi_{i,j} \sim \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est une certaine loi.

La première approche apparaissait comme la plus logique étant donné le modèle des points brillants. L'implémentation de cette approche n'a cependant pas donné de bons résultats dans le temps imparti pour l'étude du sujet mais il serait intéressant de retravailler sur cette approche afin de la comparer avec la deuxième. La deuxième approche a été implémentée avec pour loi $\mathcal{L}$ une loi de Bernouilli et c'est pour cette approche que nous présentons les résultats obtenus. L'algorithme de minimisation ℓ^1 utilisé est l'algorithme Orthogonal Matching Pursuit [12]. Dans Matlab, la routine utilisée est "solveOMP".

5.1 Influence de la taille M de l'échantillon sur l'image reconstruite

5.1.1 Résultats visuels

Nous reprenons la même image de départ de taille $N = 3600$ constituée de quatre points brillants, deux d'une intensité 2 (en blanc) et deux d'une intensité 1 (en gris) (figure 7).

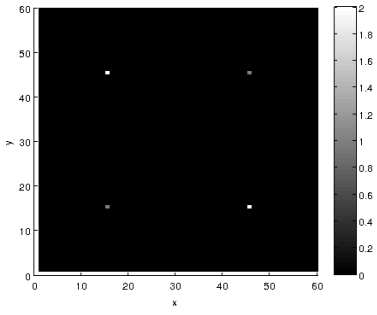


FIGURE 7 – Image de départ avec 4 points brillants

Le point intéressant du compressed sensing est que l'image est reconstruite à partir de M données $G(f,\theta)$ avec M très inférieur au nombre de données nécessaires pour une reconstruction

par Fourier. Dans la figure 8, l'image reconstruite avec $M = 30$ est assez éloignée de l'image de départ même si l'on parvient à retrouver les deux principaux points brillants, ceux d'intensité 2 dans l'image de départ, mais qui sont d'intensité 1.5 dans l'image reconstruite. Il est important de noter ici que si l'on recommençait la reconstruction d'image avec $M = 30$, il serait possible d'obtenir un meilleur résultat ou un résultat encore plus éloigné de l'image de départ. En effet, le résultat est aléatoire. Plus M va être grand, plus on va augmenter la probabilité de retrouver une image proche de l'image de départ. Avec $M = 40$, on retrouve exactement l'image de départ.

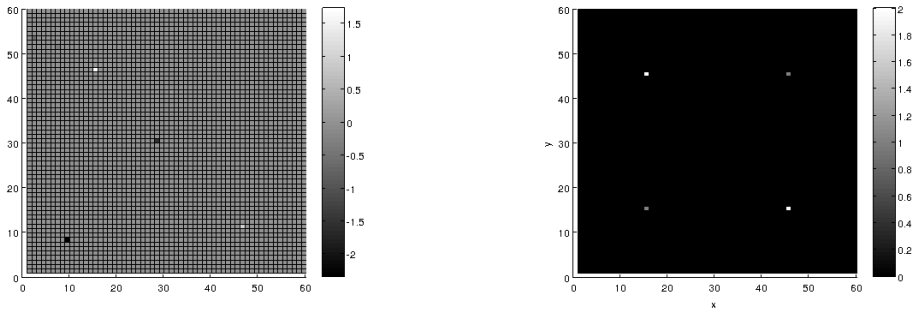


FIGURE 8 – $M = 30$ (gauche) et $M = 40$ (droite)

Afin de mieux représenter l'influence de la taille M de l'échantillon sur l'image reconstruite, on introduit dans la partie suivante un critère de performance.

5.1.2 Introduction d'un critère de performance

On reconstruit une image $\hat{g}$ à partir des données $G\big((f_j, \theta_j)\big)$, $1 \leqslant j \leqslant M$, et on cherche à comparer numériquement cette image $\hat{g}$ à l'image de départ g. On choisit ici la norme ℓ^2 : $\|\hat{g} - g\|_2$. Ce critère n'est certainement pas le meilleur et il serait intéressant de réfléchir au choix d'un meilleur critère. L'image de départ est représentée en figure 9, elle contient 6 points brillants ayant des intensités différentes.

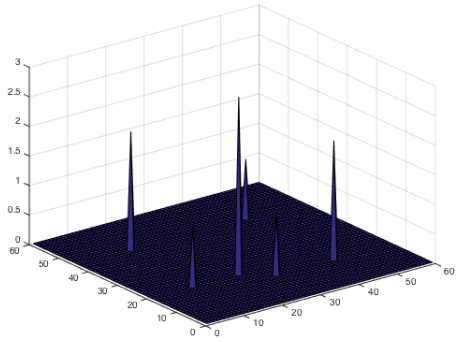


FIGURE 9 – Image de départ représentée en 3 dimension

Pour chaque valeur de $M \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$, on réalise 100 fois la reconstruction de g et on calcule la moyenne de $\|\hat{g} - g\|_2$ pour les 100 $\hat{g}$ obtenues. L'évolution de cette moyenne en fonction de M est représentée en figure 10. Il serait intéressant de représenter les quantiles à 5% et 95%. Il semble que l'image $\hat{g}$ obtenue soit très proche de l'image de départ g pour une taille d'échantillon $M = 60$ pour le critère choisi.

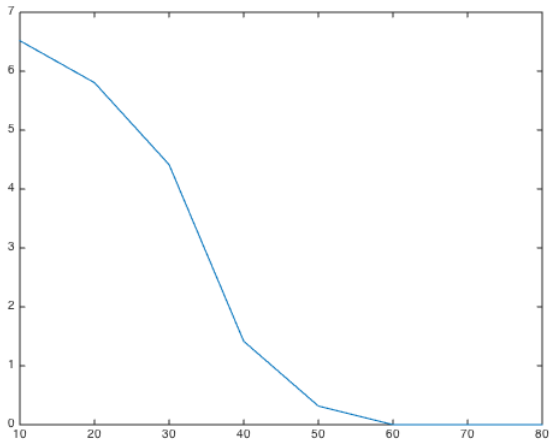


FIGURE 10 – Evolution de la moyenne de $\|\hat{g} - g\|_2$ sur les 100 reconstructions effectuées en fonction de M

5.2 Illustration sur données bruitées

On étudie maintenant la performance du compressed sensing sur des données bruitées. On part d'une image de départ représentée en une dimension en figure 11 à partir de laquelle on calcule M valeurs de $G(f, \theta)$ auxquelles on ajoute un bruit. On reconstruit alors l'image à partir des $G(f, \theta)$ bruités. L'image reconstruite est représentée à droite en figure 11. L'image reconstruite est très proche de l'image de départ malgré quelques imperfections.

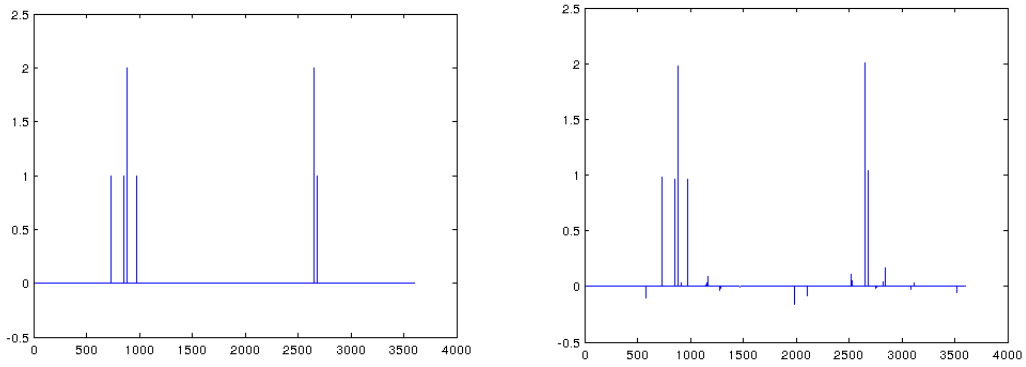


FIGURE 11 – Image de départ (gauche) et image reconstruite pour $M = 60$ (droite)

6 Conclusion et perspectives

Pour conclure, le compressed sensing paraît être une alternative très intéressante à la reconstruction classique d'un signal en séries de Fourier, car il permet de s'affranchir de la condition sur l'échantillon donnée par le théorème de Nyquist-Shannon. Le principal problème vient du fait que lors de l'utilisation du compressed sensing, l'échantillonnage doit être fait en sélectionnant des coefficients de Fourier tirés aléatoirement, notamment car il très difficile de prouver

la condition RIP, qui permet de garantir la bonne reconstruction du signal, pour des matrices non-aléatoires.

Par la suite, il serait intéressant d'implémenter la résolution du problème de minimisation ℓ^1 en utilisant non pas des matrices aléatoires comme cela a été fait ici, mais avec la matrice de Fourier, et de comparer les résultats obtenus à la reconstruction classique utilisant la transformée de Fourier inverse. Il serait également intéressant d'étudier s'il est possible de résoudre le problème de minimisation ℓ^1 avec de plus en plus de mesures M, en utilisant une version incrémentale de la résolution du problème, et de déduire de l'évolution du nombre de points brillants trouvés quel M est suffisant pour reconstruire parfaitement les points brillants. Ainsi, on aimerait montrer que lorsque le nombre d'échantillons continue d'augmenter mais que le nombre de points brillants reste constant alors l'algorithme a convergé et le signal reconstitué est le bon. Sur ce point, il y aurait à la fois un travail numérique et un travail théorique à effectuer.

Enfin, à plus long terme, il faudra déterminer l'algorithme à utiliser pour la minimisation ℓ^1, notamment en déterminant la robustesse des routines déjà existantes, afin d'estimer s'il est suffisant d'utiliser un algorithme de minimisation ℓ^1 existant, ou bien s'il est nécessaire de réaliser une routine particulière au cas d'Airbus, afin notamment de maîtriser ce qui est fait dans l'algorithme et d'utiliser la spécificité du problème posé.

Il serait également possible d'étudier plus en profondeur les différentes matrices aléatoires pouvant être utilisées, afin d'étudier s'il serait envisageable de considérer des matrices d'échantillonnages Φ différentes de la matrice de Fourier, tout en conservant les mesures sur $G(f, \theta)$, les coefficients de Fourier des points brillants.

Références

[1] Richard Baraniuk, Mark Davenport, Ronald DeVore, and Michael Wakin. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices. *Constructive Approximation*, 28(3) :253–263, 2008.

[2] Richard Baraniuk and Philippe Steeghs. Compressive radar imaging. *IEEE Radar Conference, Waltham, MA*, pages 128–133, April 2007.

[3] Christian Brousseau. *Caracterisation large bande de fréquence : application au radar et au sondage de canal*. Habilitation à diriger des recherches, Université Rennes 1, Decembre 2005.

[4] Emmanuel J. Candès. Compressive sampling. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians : Madrid, Spain*, pages 1433–1452, August 22-30, 2006.

[5] Emmanuel J. Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 346(9–10) :589–592, May 2008.

[6] Emmanuel J. Candès, Justin K. Romberg, and Terence Tao. Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52 :489–509, June 2004.

[7] Emmanuel J. Candès, Justin K. Romberg, and Terence Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Comm. Pure Appl. Math.*, 59 :1207–1223, August 2006.

[8] Emmanuel J. Candès and Michael B. Wakin. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2) :21–30, March 2008.

[9] David L. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(4) :1289–1306, April 2006.

[10] Joachim H.G. Ender. On compressive sensing applied to radar. *Signal Processing*, 90(5) :1402–1414, 2010.

[11] Michael Lustig, David Donoho, and John M. Pauly. Sparse MRI : The application of compressed sensing for rapid MR imaging. *Magnetic resonance in medicine*, 58(6) :1182–1195, December 2007.

[12] J. Tropp and A. C. Gilbert. Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2005.